

## Séminaire de thermodynamique

# La théorie de Betz étendue aux éoliennes carénées

H. Jeanmart  
J.-M. Seynhaeve  
G. Winckelmans

29 avril 2005



1

## Sommaire

- Différentes expressions de la puissance du vent
- La théorie de Betz
- Extension de la théorie de Betz
- Illustrations
- Performances des éoliennes carénées
- Remarques



2

## Expressions de la puissance : la puissance disponible

Expression synthétique

$$P_d = \frac{I}{2} \rho A c_0^3$$

Expression physique

$$P_d = \dot{m} \frac{c_0^2}{2} = \rho A c_0 \frac{c_0^2}{2}$$

Puissance disponible = débit \* énergie cinétique

## Expressions de la puissance : la puissance prélevée

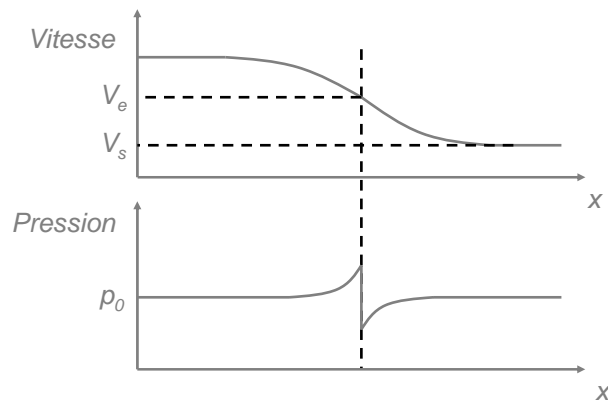
Expression physique

$$P_p = (\rho A c_e) \frac{c_0^2 - c_s^2}{2}$$

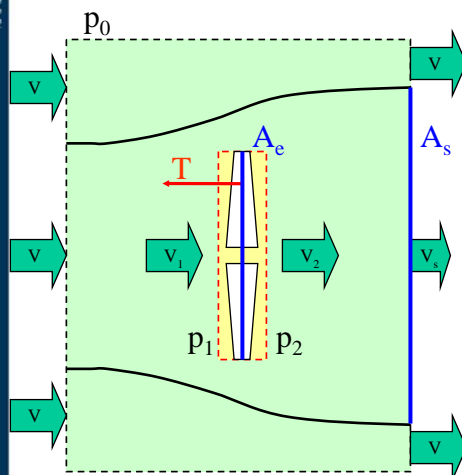
Puissance prélevée = débit \* différence d'énergie cinétique

## La théorie de Betz : approche

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement
- Conservation de l'énergie



## La théorie de Betz : la quantité de mouvement



Contour isobare  $p_0$

$$T = \rho A_s c_s (c_0 - c_s)$$

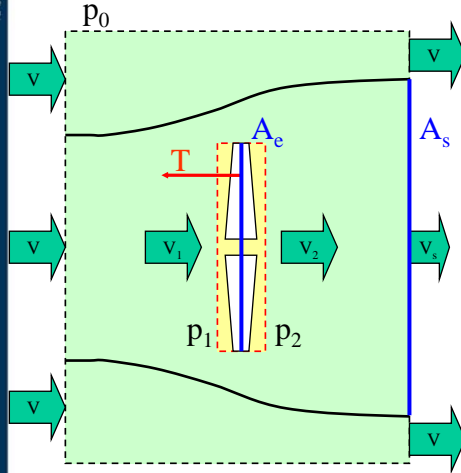
car  $\oint p d\vec{n} = 0$

Contour éolienne  $p_1 - p_2$

$$T = A_e (p_1 - p_2)$$

car  $c_1 = c_2 = c_e$

### La théorie de Betz : conservation de l'énergie

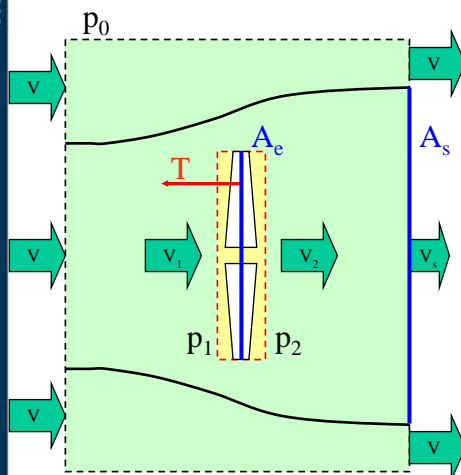


$$p_1 - p_0 = \rho \frac{c_0^2 - c_e^2}{2}$$

$$p_0 - p_2 = \rho \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{c^2 - c_s^2}{2}$$

### La théorie de Betz : contrainte sur la vitesse



$$A_e(p_1 - p_2) = \rho A_s c_s (c_0 - c_s)$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{c_0^2 - c_s^2}{2}$$

$$c_e = \frac{c_0 + c_s}{2}$$

## La théorie de Betz : la puissance prélevée

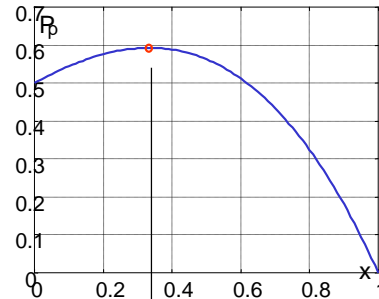
$$P_p = (\rho A c_e) \frac{c_0^2 - c_s^2}{2}$$

$$x \triangleq \frac{c_s}{c_0}$$

$$c_e = c_0 \frac{1+x}{2}$$

$$P_p = \left( \rho A c_0 \frac{1+x}{2} \right) c_0^2 \frac{1-x^2}{2}$$

$$P_p = \frac{1}{2} \rho A c_0^3 \frac{(1+x)(1-x^2)}{2}$$



Optimum pour  $x = \frac{1}{3}$

$$P_p = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho A c_0^3$$

9

## La théorie de Betz : en pratique ...

$$P_p = \eta_{eff} \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho A c_0^3$$

ex : Nordex N80

$$D = 80m$$

$$C_{rating} = 15m/s$$

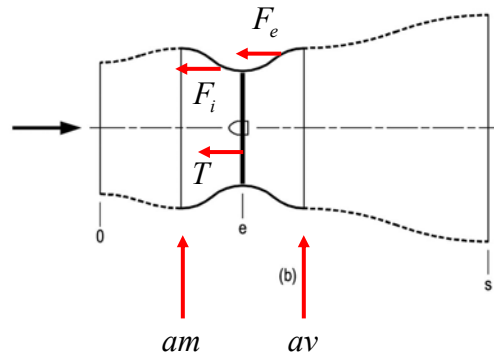
$$P_{nominale} = 2500kW$$

$$P_p = \eta_{eff} \frac{16}{27} \frac{1}{2} 1.2 \cdot 5026 \cdot 3375 = 2500000$$

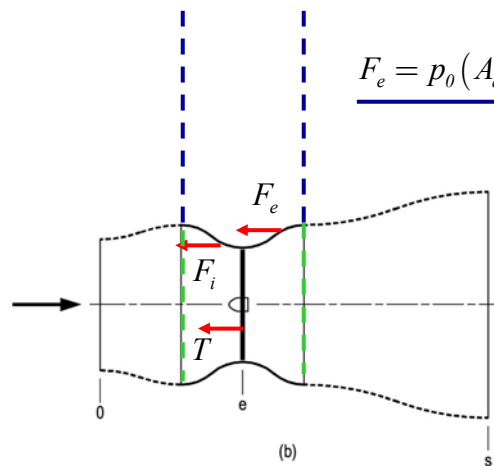
$$\eta_{eff} = 0.40$$

10

## Extension de la théorie de Betz : notations



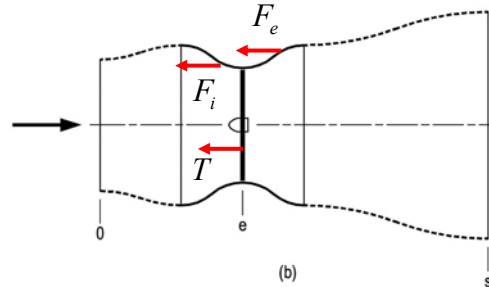
## Extension de la théorie de Betz : les forces



$$F_e = p_0 (A_{av} - A_{am})$$

$$F_i + T = \dot{m} (c_{am} - c_{av}) + A_{am} p_{am} - A_{av} p_{av}$$

### Extension de la théorie de Betz : bilan global

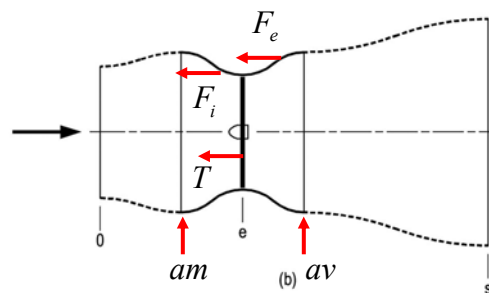


$$\dot{m}(c_0 - c_s) = T + F_e + F_i$$

$$\dot{m}(c_0 - c_s) = \dot{m}(c_{am} - c_{av}) + A_{am}p_{am} - A_{av}p_{av} + p_0(A_{av} - A_{am})$$

$$\dot{m}((c_0 - c_{am}) - (c_s - c_{av})) = A_{am}(p_{am} - p_0) - A_{av}(p_{av} - p_0)$$

### Extension de la théorie de Betz : alternative



Bilan entre les sections 0 et am

$$\dot{m}(c_0 - c_{am}) = (p_{am} - p_0)A_{am}$$

Bilan entre les sections av et s

$$\dot{m}(c_{av} - c_s) = (p_0 - p_{av})A_{av}$$

$$\dot{m}((c_0 - c_{am}) - (c_s - c_{av})) = A_{am}(p_{am} - p_0) - A_{av}(p_{av} - p_0)$$

## Extension de la théorie de Betz : bernoulli

$$\dot{m}((c_0 - c_{am}) - (c_s - c_{av})) = A_{am}(p_{am} - p_0) - A_{av}(p_{av} - p_0)$$

$$p_{am} - p_0 = \rho \frac{c_0^2 - c_{am}^2}{2}$$

$$p_{av} - p_0 = \rho \frac{c_0^2 - c_{av}^2}{2}$$

$$\dot{m}((c_0 - c_{am}) - (c_s - c_{av})) = A_{am}\rho \frac{c_0^2 - c_{am}^2}{2} - A_{av}\rho \frac{c_0^2 - c_{av}^2}{2}$$

## Extension de la théorie de Betz : notations

$$\dot{m}((c_0 - c_{am}) - (c_s - c_{av})) = A_{am} \frac{c_0^2 - c_{am}^2}{2} - A_{av} \frac{c_0^2 - c_{av}^2}{2}$$

$$\beta = \frac{c_e}{c_0}$$

$$\alpha_{av} = \frac{c_e}{c_{av}}$$

$$\alpha_{am} = \frac{c_e}{c_{am}}$$

Facteurs  
géométriques

$$\dot{m}c_0 \left( \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha_{am}} \right) - \left( x - \frac{\beta}{\alpha_{av}} \right) \right) = \frac{1}{2} A_e \rho c_0^2 \left( \alpha_{am} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha_{am}^2} \right) - \alpha_{av} \left( x^2 - \frac{\beta^2}{\alpha_{av}^2} \right) \right)$$



## Extension de la théorie de Betz : après calculs ...

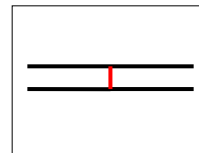
$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha_{av}} - \frac{1}{\alpha_{am}} \right) \beta^2 + (1-x)\beta - \frac{1}{2} (\alpha_{am} - \alpha_{av} x^2) = 0$$

$$\beta = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(1-x)^2 + \left( \frac{1}{\alpha_{av}} - \frac{1}{\alpha_{am}} \right) (\alpha_{am} - \alpha_{av} x^2)}}{\left( \frac{1}{\alpha_{av}} - \frac{1}{\alpha_{am}} \right)}$$

$$P_p = \frac{1}{2} \rho A c_0^3 (1-x^2) \beta$$

## Extension de la théorie de Betz : illustrations

$\alpha_{am} = 1$   
 $\alpha_{av} = 1$   $\longrightarrow$  Pas de carénage



L'équation en  $\beta$  est dégénérée et devient du premier ordre.

La solution est

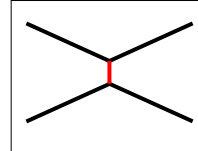
$$\beta = \frac{1+x}{2}$$

$$P_p = \frac{1}{2} \rho A c_0^3 \frac{(1+x)(1-x^2)}{2}$$

On retrouve bien la relation de Betz !

### Extension de la théorie de Betz : illustrations

$\alpha_{am} = \alpha$   
 $\alpha_{av} = \alpha$  → Carénage symétrique



L'équation en  $\beta$  est dégénérée et devient du premier ordre.

La solution est

$$\beta = \alpha \frac{1+x}{2}$$

$$P_p = \frac{1}{2} \rho A c_0^3 \frac{(1+x)(1-x^2)}{2} \alpha$$

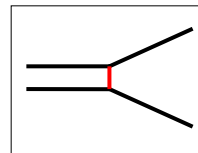
$$\alpha = \frac{A_{am}}{A} = \frac{A_{inst.}}{A}$$

$$P_p' = \frac{1}{2} \rho A_{inst.} c_0^3 \frac{(1+x)(1-x^2)}{2}$$

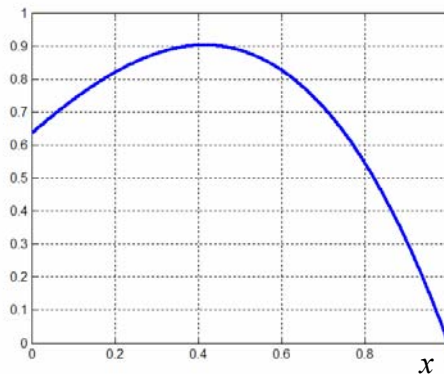
19

### Extension de la théorie de Betz : illustrations

$\alpha_{am} = 1$   
 $\alpha_{av} = 3$  → Divergent aval



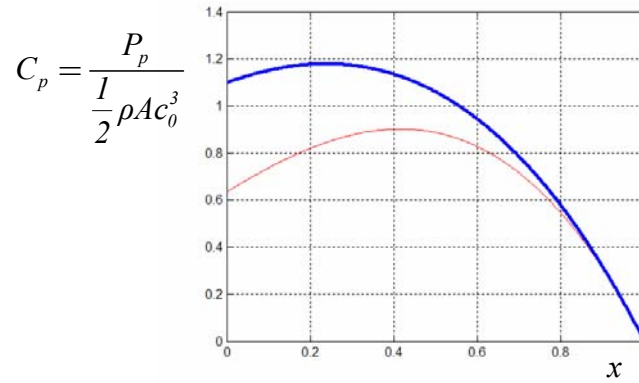
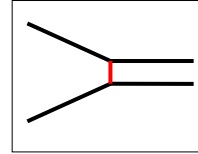
$$C_p = \frac{P_p}{\frac{1}{2} \rho A c_0^3}$$



20

## Extension de la théorie de Betz : illustrations

$\alpha_{am} = 3$   
 $\alpha_{av} = 1$  → Convergent amont

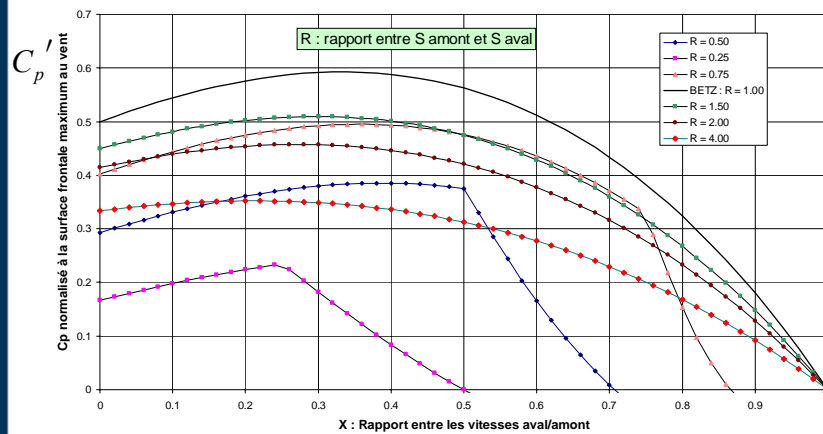


21

## Performances des éoliennes carénées

$$R = \frac{A_{am}}{A_{av}}$$

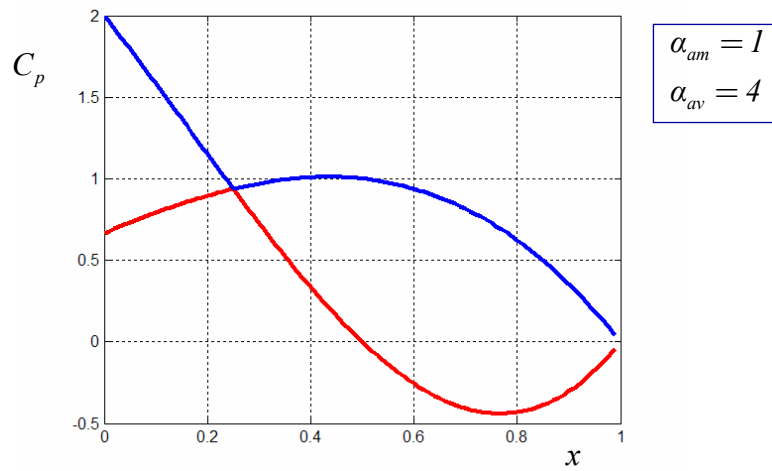
Efficacité des Eoliennes avec convergent-divergent



22

## Performances des éoliennes carénées

Deux types de comportement



## Applications particulières – la WARP

